

KMさんへ

ウロコ先生

数学 I の実数、絶対値記号のところが分かりません。

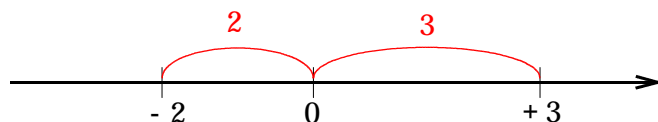
とっても基本的なことだと思うのですが、 $x = 3$ のとき $|x - 3|$ でこれを絶対値記号を外して表せという問題です。

絶対値記号の中は負でも外すと正になるんじゃないんですか。 $x = 3$ のままじゃないんですか。

もしかして、私は絶対値記号からはずしたかたちにするのと、外した形から絶対値記号にするのと混ざってますか？

【絶対値について】

定義...絶対値とは、0 からその数までの「距離」をいう。



ということになっています。しかし、その意味をしっかりとわかっていないと絶対値の応用問題が解けません。この定義から絶対値の本当の意味を知るのは大変です。

ところで「数」には“プラスの数”、“0”、“マイナスの数”の3種類しか存在しません。「距離」というのはどの数を使うのでしょうか？

上の図のように、プラスの数が 0 しか使っていません。0 から -2 までの距離は +2, 0 から +3 までの距離は +3 です。ただ、+ の符号は書かなくてもよい約束になっているから、この + を書かないだけです。

$|-2| = (+)2$, $|+3| = (+)3$ ですね。

【絶対値記号】

ということは、実際問題として $| \quad |$ (絶対値記号) をどう理解しておけばよいのか!?

これを一つの『装置』と考えてしまうのがよい。絶対値記号とは、中に入ってきた数字を + (プラス) の数字に変えてしまう器械である... “距離は + の数だから”。

$$\begin{array}{ccc} & \text{絶対値君の中} & \text{絶対値を外す} \\ + 5 & \xrightarrow{\quad} | + 5 | & \longrightarrow + 5 \end{array}$$

+ の数が入ってきても、変えてやる必要がないから、そのまま素通りさせる。

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & \\ 0 & | + 0 | & \longrightarrow 0 \end{array}$$

0 も距離としてありだから、変える必要がない。そのまま素通り。

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & \\ - 5 & | - 5 | & \longrightarrow + 5 \end{array}$$

- 5 は困る。これを + 5 にして出してあげなければ!? ではどのようにして?

次のようにしてやればよい。

$$| - 5 | \longrightarrow - (- 5) \longrightarrow + 5$$

- の数はその前に - をつけてやれば全体として + になる!

【実践問題】

$|x|$ の絶対値を外しなさい。

“ x は + ですか? - ですか?”... 「わからない」が答えです。

“ x の前の符号は?” ときかれたら、それは + です。

x の前についている符号と x 自体の + , - は区別しなければならない。ここは錯覚しやすいところです。

問題文では文字 x は何かの数ですが、その数が $+$ の数(例えば $+ 2$)なのか、 0 なのか、 $-$ の数(例えば $- 2$)なのか、指定してありません。

x が $+$ の数ならば、そのまま絶対値をとってやっても差し支えありませんが、もしも $-$ の数ならば $- x$ としてあげて、はじめて全体として $+$ の数になります。 $- (- 2) = + 2$ のごとし。

$- x$ が $-$ の数だとは言えないのです。

だから、 $|x|$ の絶対値を外すには、その x 自体が $+$ の数か $-$ の数かを場合分けしなければならない。文字のままでは数字と違って $+$ か $-$ かわからないから・・・

【この問題の答案】

-) $x < 0$ のとき “ x がマイナスの数ときだよ！” ということ
 $|x| = -x$ x がマイナスの数だから、 $- x$ がでやっと全体が $+$ の数になる。
これで $+$ の数になった $x = - 2$ として考えてみよう。 $- (- 2)$ で、やっと $+$ になるでしょ。
-) $0 \leq x$ のとき “ x が 0 かプラスの数ときだよ！” ということ
 $|x| = x$ x 自体が 0 かプラスの数なのだから、絶対値装置君が手を貸す
このままで $+$ の数 必要がない。そのままフリーパスで出してあげればよい。

0 は $+ 0$ も $- 0$ も同じ数なので、)か)のどちらかの場合にイコールを含めておけばよい。

【質問の問題に戻って】

$x \geq 3$ のとき $|x - 3|$ でこれを絶対値記号を外して表せ。

本来なら、 $x \geq 3$ のときという条件は親切すぎます。この条件なしにただ $|x - 3|$ を絶対値記号を外して表せ。 として出題するのが普通です。

今度は $| \quad |$ の中に $x - 3$ という 1 つの式が入りました。式だって、計算すれば全体として 1 つの数値になることは変わりありません。絶対値記号君が考えるのは、“この $x - 3$ をどのようにして $| \quad |$ の外に出してあげるか” です。

$x - 3$ が 0 or + の数ならばそのまま素通りさせればよいし、- の数ならば - をつけてあげなければ + の数になりません。さてどうするか？ x がいくつなのか不明なので、このままでは $x - 3$ が + の数になるか - の数になるのかわかりません。だから + のときと - のときに場合分けしてやらなければならない。

) $x - 3 < 0$, すなわち $x < 3$ のとき

$$\begin{aligned} |x - 3| &= - (x - 3) && \text{これで+の数になった} \\ &= -x + 3 && x < 3 \text{ なので、} x - 3 \text{ がこのままではマイナスの数。だから、} \\ & && \text{前に - をつけてあげて、} - (x - 3) \text{ ではじめて全体が+になる。} \end{aligned}$$

) $0 \leq x - 3$, すなわち $3 \leq x$ のとき

$$\begin{aligned} |x - 3| &= x - 3 && 3 \leq x \text{ なので、} x - 3 \text{ がこのままでプラスの数。} \\ & && \text{だから、何の手も加えず、このまま出してよい。} \end{aligned}$$

K M さんの質問は、) の場合に関するものでした。...(= はついてても同じ)

絶対値記号の中は負でも外すと正になるんじゃないんですか。
 $x - 3$ のままじゃないんですか。

以上の説明で、K M さんがちょっとした何かに錯覚していることがわかるかな？

絶対値記号の中は負でも外すと正になるんじゃないんですか。

そのとおりです。ただ、 $x < 3$ のときという条件では、 $x - 3$ が負になってしまったため、 $x - 3$ のままでは正になりません。正にしてあげるために、- をつけて $-(x - 3)$ になれば、これ全体でやっとプラスの数になります。

$x - 3$ のままじゃないんですか。

これだと $x < 3$ の範囲ではマイナスの数ですね。

$$|+3| = 3, |0| = 0, |-3| = -(-3) = 3$$

のように、絶対値記号の中が数字のときはわかりやすいけれど、文字や式が絶対値記号の中に入ってきたときは、その文字や式が 0 以上(0 or +)になっているか 0 より小さい(-)かを検討しないと、絶対値を外すことができません。

条件がついていればそれに従って文字や式の正負を判定し、
ついていなければこちらが場合分けして解かなければならないのです。