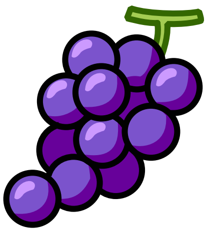
教科書完全マスターシリーズ

じっくり読むだけで，教科書のすべてが分かる！！

あしたの数学！

Math for Tomorrow！

中３ 第4章 2乗に比例する関数



考える学習をすすめる会

柳原英数教室 塾長 石田 和彦 著

考える学習をすすめる会

http://kangaeru.org

は・じ・め・に

本シリーズは，その名の通り**教科書を完全にマスターすること**を目的とした，**基本重視**のテキストです。市販の解説書・参考書にくらべて，**圧倒的に分かりやすくていねいな説明**に心がけ，**じっくり読むだけで教科書のすべてが分かる自習用テキスト**を目指しました。

もちろん，**考える学習をすすめる会**のテキストですから，丸暗記やパターン練習ではなく，**用語の意味の理解**・**公式や定理の成り立ちの理解**・**解き方よりも考え方の理解**を重視しました。基本テキストでありながら，**本物の数学力**を養うことができます。

筆者 KAZU としては, 特に次のような諸君にこのテキストを活用していただきたいと思っています。

- ★ **数学はニガテだしキライ。でもできれば何とかしたい思っている人。**
- ★ **基礎からやり直したいけど，教科書を読んでもよく分からない人。**
- ★ **学校での進度に関係なく，自分でドンドン予習を進めたい人。**

「キミたちが**あしたの**ために，**数学**の勉強に本格的に取り組んでくれれば，やがて希望に満ちた未来へと道がひらける･･･」。そんな想いから，このテキストにあしたの数学！というタイトルをつけました。

Math for tomorrow ! 明るいあしたのために。さあ，**いっしょに始めましょう！！**

このテキストの使い方

① 用語の意味，考え方・解き方を１つ１つ確認しながら，**ゆっくり・じっくり**読んでください。**拾い読み・飛ばし読みは禁物**です。

② 最低でも**２回は繰り返して**読んでください。**１回読んだだけですべて理解できれば誰も苦労しませんよ**。

③ **例**と**例題**は，別の紙に書き写したり，解答・解説部分を隠したりして，**必ず自分でも解いてみましょう**。

④ このテキストは**解説中心**のため，**練習問題が収録されていません**。本書で理解したことがらを確認するため，手持ちの**教科書用ワークブック**などを使って**問題を解いてみましょう**。

このように使いこなせば，教科書範囲が指定された公立中学定期テストにおいて，**悪い点数は**取りたくても(？)**取れなくなります！**　「平均点にとどかない」と嘆いていた諸君は**楽勝で平均突破**を。平均点前後で伸び悩んでいた諸君は **70～80%の得点を目指して**がんばってください！

本シリーズで十分な基礎を身につけたなら，**ウロコ先生**の**目からウロコの数学講座シリーズ**へとステップアップしてください。トップクラスは目の前です！！

目　次

１．関数 $y=ax^2$

中２の「一次関数」以来，久しぶりに**関数**の単元だ。先に，「関数」という用語の意味を確認しておこう。いつも言ってることだが，**単元名の意味も分からずにその単元の学習を進めても，「分かったつもり」にしかなれない**からね。まずは**用語の意味を理解**しなきゃ。

下のわく内は，先に，赤字の説明(変数について)を⇩に沿って読み，次に青字の説明(定数について)も同じように読んでから，全体像をつかんでください。

関数とは・・・

ある対応関係をもとに，ともなって変わる２つの数量

⇩（ある対応関係）

変える方 x に，ある定まった数を使って何かの計算をすると y になる。

⇩

それぞれの関数によって使われる数が違うので，やはり**文字**で表す。

⇩

定数　定まった数用には x，y とは別の文字 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を用いる。

⇩（ともなって変わる２つの数量）

どんどん変わってしまうから，数で特定できない。

⇩

文字で表す。

⇩

変数　変える方を $\boldsymbol{x}$，変わる方を $\boldsymbol{y}$ とする。

※　関数では，**一方の値 x が決まると，もう一方の値 y も１つに決まる。**

※　関数を式で表すとき，**変わる方 y を，変える方 x の式で表す**のがふつう。(y＝「x を使った式」という形になる)。

関数は，その変化の仕方によって名前が付いている。中学で登場した関数を，順を追ってみていくと，

中１　比　例　……　y（変わる方の数）を求めたければ，x（変える方の数）に a（ある決まった数）を掛ければよい。

$y=ax$

中１　反比例　……　y（変わる方の数）を求めたければ，a（ある決まった数）を x（変える方の数）で割ればよい。

$y=\dfrac{a}{x}$

中２　一次関数　……　y（変わる方の数）を求めたければ，x（変える方の数）に a（ある決まった数）を掛けてから b（別の，ある決まった数）を足せばよい。
y が x の「一次式」になる。

$y=ax+b$

じゃあ，中３ではどんな関数が登場するのかというと，

x と y の関係が，$y=ax^2$（a は定数）の形で表される関数

例えば，　$y=3x^2$ のように。

このとき，**y は x の２乗に比例する**といい，**a** を**比例定数**という。

また，$y=ax^2$ の形で表される関数を，**２乗に比例する関数**という（これを「**二次関数**」と呼ぶ人が多いが，厳密（げんみつ）に言うと**不適切**。「比例」を「一次関数」と呼んでいるようなものだ。本格的な「二次関数」は高１で習う）。

２乗に比例する関数 $y=ax^2$ の**式の意味**は，次のページにあるとおり。

２乗に比例する関数

$y=ax^2$

……**y（変わる方の数）を求めたければ，x（変える方の数）の２乗にa（ある決まった数）を掛ければよい。**

「そんなの当たり前だ！」と言ってしまえばそれまでだが，この「当たり前のこと」が分かっていないと，**x の値に対応する y の値を求めるときに困る**。

例えば，「$y=-3x^2$ で，$x=2$ のときの y の値は？」と問われたら，$y=-3x^2$ に，$x=2$ を代入し，

$y=-3\times2^2$　　← y を求めたければ，x である２の２乗に-3 を掛ける。
$y=-12$

のような計算が，**暗算でパッ**とできないとヤバイ。２乗に比例する関数では，このような場面が非常に多いから。

次に，２乗に比例する関数において，対応する x，y の値の変化を調べてみよう。例として，$y=3x^2$ を用いる。

３倍

２倍

x	0	1	2	3	4	…
y	0	3	12	27	48	…

４倍(2^2倍)

９倍(3^2倍)

このように，関数 $y=ax^2$ では，

★　x の値を n 倍すると，y の値は n^2 倍になる。

★　「対応する $y \div x^2$」は一定で，商 $\dfrac{y}{x^2}$ は a になる。

これらは，「分析（ぶんせき）」としては興味深いが，「メチャ重要」というわけではないので，よく分からなくても気にしなくていいからね。

ただし，関数 $y=ax^2$ では，比例や一次関数と違って**一定の割合で増える(減る)のではない**ということだけは知っておいてくれ。

では，仕上げにやっと問題らしい問題を。

［例題　1］

次の問いに答えなさい。

①　y は x の２乗に比例し，$x=3$ のとき $y=18$ である。x，y の関係を式に表しなさい。

②　関数 $y=ax^2$ で，$x=4$ のとき $y=4$ である。y を x の式で表しなさい。

③　y は x の２乗に比例し，$x=2$ のとき $y=-12$ である。$x=-4$ のときの y の値を求めなさい。

「y は x の２乗に比例し」と「関数 $y=ax^2$ で」。表現は違うが，同じことを言っている。「x，y の関係を式に表しなさい」と「y を x の式で表しなさい」も同様。

ここはヘンにワザを使わず，**$y=ax^2$ に x，y の値を代入する**という，オーソドックスな解き方でいこう(ちゃんと理解できている人は，4 ページ 3 行目にある方法で，イッパツで a を求めてもかまわないが…)。

［解］

① $y=ax^2$ に $x=3$，$y=18$ を代入すると，

$18=a\times3^2$　　← いきなり $18=9a$ でよい。

$9a=18$　　← 右辺と左辺を入れかえる。こんな手間をかけなくても，$18=9a$ の直後に「$=18$」と書き加え，$18=\boxed{9a=18}$ の $\boxed{}$ の中だけを見ればよい(以下，その形で)。

$a=2$

したがって，$\boldsymbol{y=2x^2}$

② $y=ax^2$ に $x=4$，$y=4$ を代入すると，

$4=\boxed{16a=4}$　　← 両辺を 16 で割る。

$a=\dfrac{1}{4}$　　← **$a=4$ などとミスるな！！**

したがって，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{4}x^2}$

③ $y=ax^2$ に $x=2$，$y=-12$ を代入すると，

$-12=\boxed{4a=-12}$

$a=-3$　より，式は，$\boldsymbol{y=-3x^2}$

これに，$x=-4$ を代入して，

$y=-3\times16$

$\boldsymbol{y=-48}$

２．$y=ax^2$ のグラフ

関数の「変化の仕方」を表すには，**式・表・グラフ**等の方法があるが，やっぱり一番いいのは**グラフ**だよね。何と言っても，**変化の様子が目で見てすぐに分かる**のだから。

とゆーわけで，**２乗に比例する関数のグラフ**をかいてみよう！

ただし，4 ページにもあるように，関数 $y=ax^2$ で，x，y の値は**一定の割合で増える(減る)わけではない**ので，比例や一次関数のように「定規でスーッ」というわけにはいかない。しょーがないから，がんばって**表**を作ってみよう。

【例 1】関数 $y=x^2$

ふつう，この手の表は「１ずつ」で十分なんだけど，**正確なグラフをかく**には座標の数が足りないので，**0.5 ずつ**にしてみる(数学では**分数**が原則だが，ここでは**小数**を使うよ。その方が座標で表しやすいから)。

x	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	6.25	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	6.25

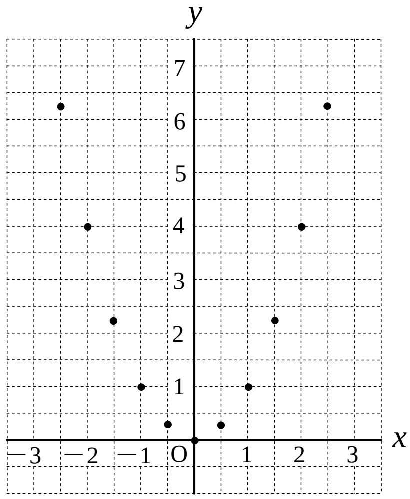
7 ページの図は，上の表をもとに，x，y の値の組を座標とする点をとったもの。これらは一直線上にはないので，**なめらかな曲線**で結べば，関数 $y=x^2$ のグラフのできあがりだ。

…と言うのは簡単だが，慣れるまではチョット大変。**フリーハンドで曲線を引くのって，意外に難しい**んだよね。加えて，中３といえどもこの単元が定期テストの範囲に含まれると，**「$y=ax^2$ のグラフをかくだけ」の基本問題**が出題されることもある。**へたっぴいなグラフ**をかいて，こんな**オイシイ問題でバツをくらってはもったいない**。そこで，**フリーハンドでのグラフのかき方**を徹底

解説します。

中学では，**グラフは方眼紙にかく**ケースほとんど。座標を点としてポツポツ落としていくにはその方がかきやすいからだが，そのため，**何よりも正確さが要求される**。

ここで言う「**正確さ**」とは，



グラフが**正しい座標**を通っているか

当たり前のことだが，座標としてとった**点の上をちゃんと通る**ように。

また，点の数が足りないと，**本来通るハズの点を通らないことがある**。(8 ページの悪い例１)

グラフが**正しい形**でかかれているか

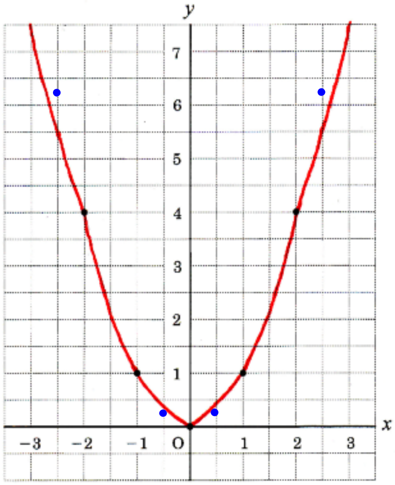
フリーハンドでかくのだから，**線が少し曲がったり，ひょろひょろになったりしても仕方がない**。が，**関数としての増え方・減り方が変わってしまうようなグラフはマズイ**。

点と点の間の部分は，それなりになめらかな曲線が引けるだろうが，問題は**最初(または最後)の点からグラフ用紙の端までだ**(上の図だと，x が-3.5 より小さい部分と 3.5 より大きい部分)。

8 ページの悪い例２，３のような**いい加減なグラフをかいている人**が意外に多い。これじゃあ，バツになっても文句が言えないかも…。

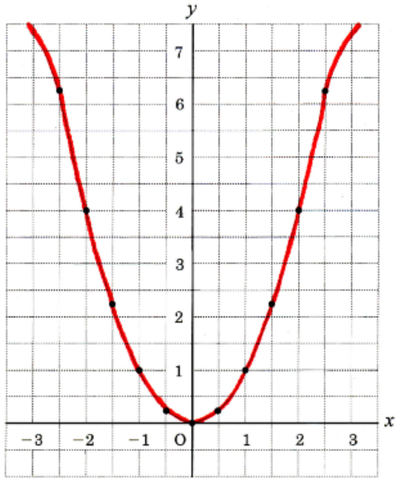
このような場合，大体でいいから，**グラフ用紙の外に次の点**(上の図だと，(3，9)と(-3，9)を適当に)**をとって**，スムーズにつながるようにしよう。

［悪い例１］



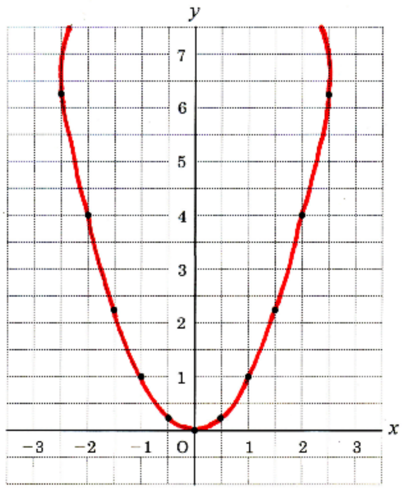
点の数が足りず，不正確。**原点付近が尖っちゃってるし，上も広がりすぎ**(・は，本来通るハズの点)。

［悪い例２］



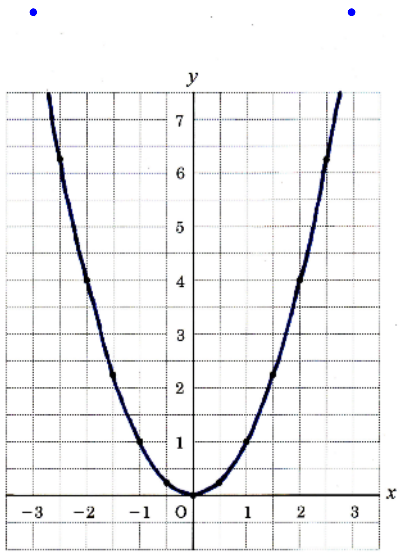
点と点の間はうまく結べているが $y=6.25$ より**上が不自然に開いている！**

［悪い例３］



２とは逆に，上が**不自然にすぼまっている**。

［よい例］

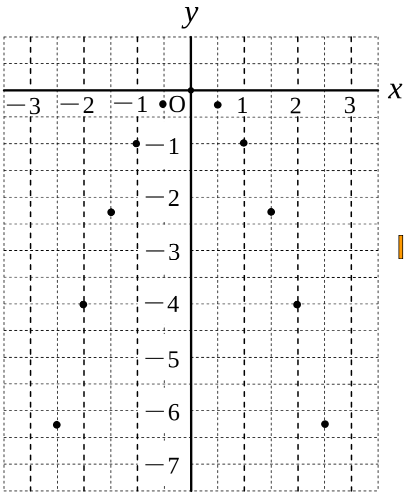


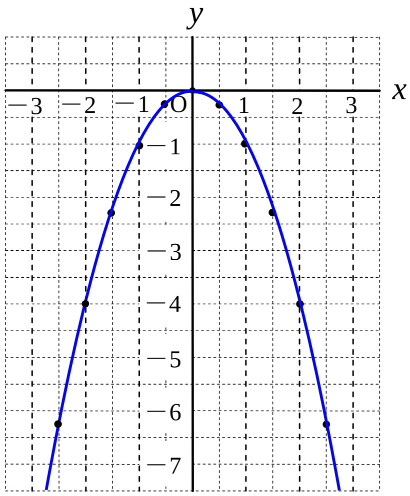
・は，グラフ用紙の外に，目印として「次の点」をとったもの。

【例２】関数 $y=-x^2$

x	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	-6.25	-4	-2.25	-1	-0.25	0	-0.25	-1	-2.25	-4	-6.25

8ページの［よい例］を参考に，左下のグラフ用紙に，自分でもかいてみよう。





［例題　1］

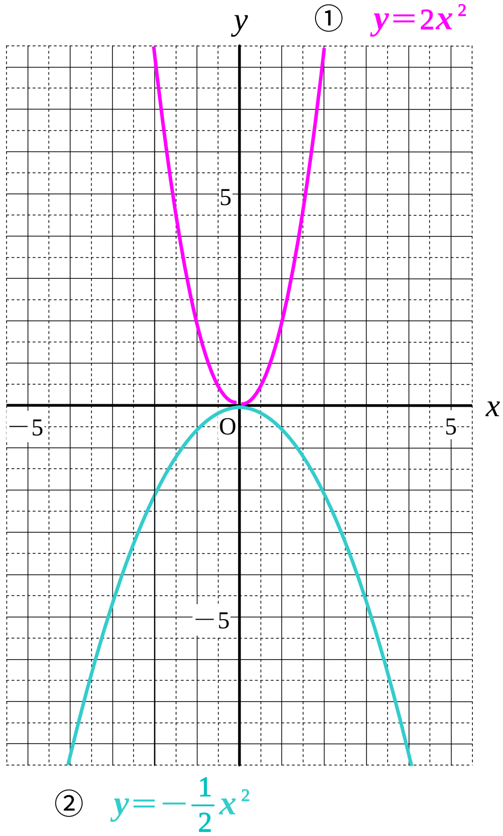
次の関数のグラフをかきなさい。

①　$y=2x^2$　　　　②　$y=-\frac{1}{2}x^2$

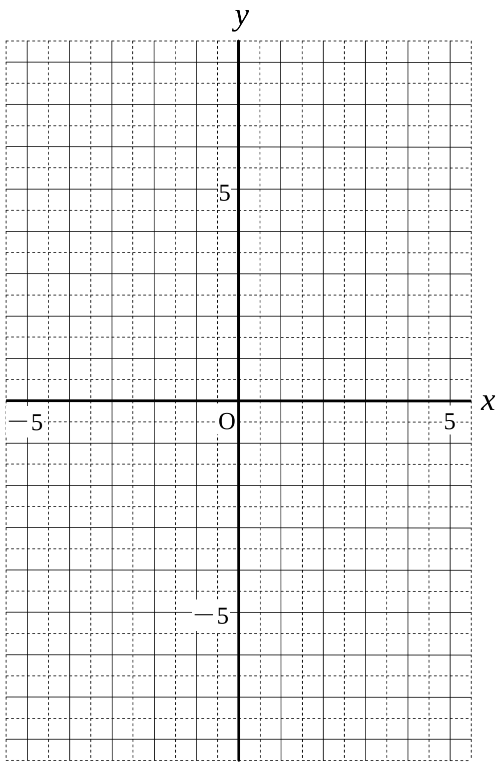
慣れれば，表など作らずに，直接グラフ用紙に点をポツポツ落としていった方がよい。

このセクションでの目標は，**グラフをなるべく正確にかく**こと。面倒でも「**0.5ずつ**」，必要なら「**用紙の外に目安(めやす)の点**」といった注意事項をお忘れなく。

［解］

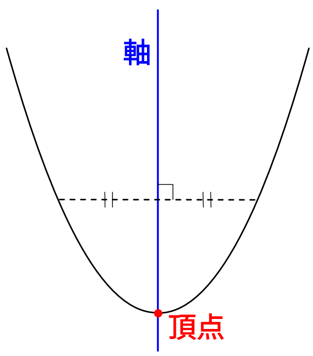


［練習用］



$y=ax^2$ のグラフのような曲線を**放物線**（ほうぶつせん）という。「**放**（ほう）り投げられた**物**が空中にえがく曲**線**」が語源（ごげん）。ヒマな人は，夜，公園とかで，何か光るものを投げ上げてみて。美しい光の放物線が見られるよ(笑)。

放物線は，限りなく伸びた曲線で，線対称な図形である。その対称の軸を**放物線の軸**，軸と放物線との交点を**放物線の頂点**という。



２乗に比例する関数の場合，軸は y 軸，頂点は原点である。

ここで，関数 $y=ax^2$ のグラフのまとめ。一見，難しそうだけど，すべて「当たり前のこと」だからね。

（１）$y=ax^2$ のグラフ全般に言えること

★　グラフは **y 軸について対称**である。
　　(x の値の絶対値が等しいとき，y の値は等しいから)

★　グラフは**原点を通る**。
　　($x=0$ のとき，$y=0$ だから)

（２）$y=ax^2$ で，a が正の数($a>0$)のとき

★　グラフは **x 軸の上側にあり，上に開いている**。
　　(x の値にかかわらず y の値はつねに 0 以上で，いくらでも大きくなるから)

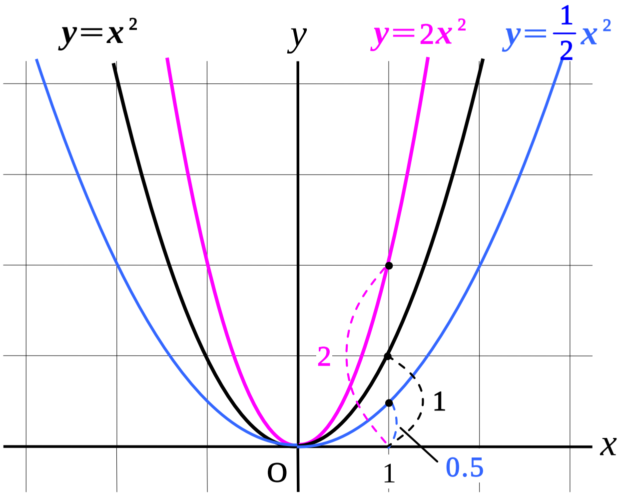
（３）$y=ax^2$ で，a が負の数($a<0$)のとき

★　グラフは **x 軸の下側にあり，下に開いている**。
　　(x の値にかかわらず y の値はつねに 0 以下で，いくらでも小さくなるから)

同じ放物線でも，**a の絶対値によって，開き方が変わってくる**。大ざっぱにいうと，

a の絶対値が大きいほど，開き方が狭(せま)くなり，

a の絶対値が小さいほど，開き方が広くなる。



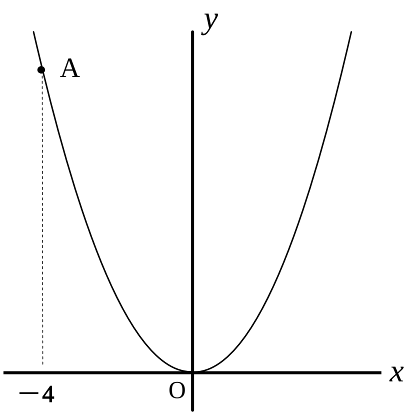
$x=1$ のときを基準にすると，**y の値がそのまま a の値となって現れる**。これをベースにして大体の開き加減が調節できるようにしておこう。

17 ページ以降では**目盛りナシの「完全フリーハンド」で放物線をかいてもらうことになる**から，右上のグラフで **a の絶対値による放物線の開き具合**を頭にいれておいてね。

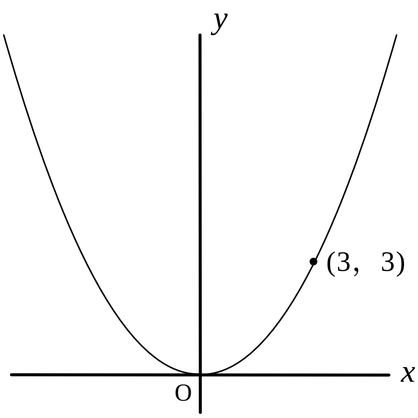
［例題　2］

次の問いに答えなさい。

① 下の図は，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。点 A の x 座標が-4 であるとき，y 座標を求めなさい。



② 下の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフが点(3，3) を通るとき，a の値を求めなさい。



お世辞(せじ)にも「難問(なんもん)」とはいえない。が，声を大(だい)にして言いたいことがある。

これらがグラフの応用問題の中に混じると，手も足も出なくなる人がいるのはどーゆーわけか？

確かに，放物線がからんだ「グラフの応用問題」は，**問題文が長い**し，図が入り組んでいて**ややこしく見える**。しかし，**「ややこしい」のと「難しい」のとは明らかに違う**。３～５問セットの応用問題の１問目はこんな**オイシイ問題**ばかりなんだよ！(これについては，35 ページであらためて)

①は，$y=\frac{1}{2}x^2$ で，$x=-4$ のときの y の値を求めなさい。

②は，$y=ax^2$ で，$x=3$ のとき $y=3$ である。y を x の式で表しなさい。

と言っているだけだからね。

［解］

① $y=\frac{1}{2}x^2$ に，$x=-4$ を代入すると，

$y=\frac{1}{2}\times(-4)^2$ 　← こんなの，暗算でやっちゃって。

$y=8$ 　よって，**y 座標は 8**

② $y=ax^2$ に，$x=3$，$y=3$ を代入すると，

$3=9a$

$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$

無料ダウンロード版はココまでです。続きは有料版をごらんください。