教科書完全マスターシリーズ

じっくり読むだけで，教科書のすべてが分かる！！

あしたの数学！

Math for Tomorrow！

中３

第３章　二次方程式

考える学習をすすめる会

柳原英数教室塾長　石田 和彦　著

考える学習をすすめる会

http://kangaeru.org

は・じ・め・に

本シリーズは，その名の通り**教科書を完全にマスターすること**を目的とした，**基本重視**のテキストです。市販の解説書・参考書にくらべて，**圧倒的に分かりやすくていねいな説明**に心がけ，**じっくり読むだけで教科書のすべてが分かる自習用テキスト**を目指しました。

もちろん，**考える学習をすすめる会**のテキストですから，丸暗記やパターン練習ではなく，**用語の意味の理解**・**公式や定理の成り立ちの理解**・**解き方よりも考え方の理解**を重視しました。基本テキストでありながら，**本物の数学力**を養うことができます。

筆者 KAZU としては, 特に次のような諸君にこのテキストを活用していただきたいと思っています。

- ★ **数学はニガテだしキライ。でもできれば何とかしたい思っている人。**
- ★ **基礎からやり直したいけど，教科書を読んでもよく分からない人。**
- ★ **学校での進度に関係なく，自分でドンドン予習を進めたい人。**

「キミたちが**あしたの**ために，**数学**の勉強に本格的に取り組んでくれれば，やがて希望に満ちた未来へと道がひらける･･･」。そんな想いから，このテキストにあしたの数学というタイトルをつけました。

Math for tomorrow. 明るいあしたのために。さあ，**いっしょに始めましょう！！**

このテキストの使い方

①　用語の意味，考え方・解き方を１つ１つ確認しながら，**ゆっくり・じっくり**と読んでください。**拾い読み・飛ばし読みは禁物**です。

②　最低でも**２回は繰り返して**読んでください。**１回読んだだけですべて理解できれば誰も苦労しませんよ**。

③　**例**と**例題**は，別の紙に書き写したり，解答・解説部分を隠したりして，**必ず自分でも解いてみましょう**。

④　このテキストは**解説中心**のため，**練習問題が収録されていません**。本書で理解したことがらを確認するため，手持ちの**教科書用ワークブック**などを使って**問題を解いてみましょう**。

このように使いこなせば，教科書範囲が指定された公立中学定期テストにおいて，**悪い点数は**取りたくても(？)**取れなくなります！**　「平均点にとどかない」と嘆いていた諸君は**楽勝で平均突破**を。平均点前後で伸び悩んでいた諸君は **70～80%の得点を目指して**がんばってください！

本シリーズで十分な基礎を身につけたなら，**ウロコ先生**の**目からウロコの数学講座シリーズ**へとステップアップしてください。トップクラスは目の前です！！

１．二次方程式とは？

二次方程式って何だ･･･？　大ざっぱに言うと,「(最大で)**二次**の項を含んだ**方程式**」のこと。例えば，$x^2=9$，$x^2-5x+4=0$ のように。

正確には，移項して整理したとき，$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ の形になるような方程式のこと(a，b，c は定数だけど，**a は 0 ではない**。$a=0$ だと，二次方程式じゃなくなっちゃうからね)。

二次方程式だって「方程式」なんだから，**あてはまる文字の値を**，その**方程式の解**，解を**すべて**求めることを**二次方程式を解く**という。「『すべて』って，なんなのよ」って？　それは，後のお楽しみということで･･･。

では，$x^2=9$，$x^2-5x+4=0$ のような二次方程式を解くにはどうすればよいか？　いきなり「解き方の解説」から入ることはたやすいが，その前に**全体像を見渡しておこう**ね。

二次方程式といえども等式なんだから，中１・方程式で出てきた**等式の性質**が成り立つ。

ア．両辺に同じ数を足しても，等式は成り立つ。

イ．両辺から同じ数を引いても，等式は成り立つ。

（ア・イ）この２つは，**移項**という形になって現れる。

ウ．両辺に同じ数を掛けても，等式は成り立つ。

エ．両辺を同じ数で割っても，等式は成り立つ。

だから，**二次方程式を解くのに，等式の性質が使われるのは当然**だ。

でも，残念ながら，これだけでは二次方程式を解くことができない。あと２つ，メチャクチャ重要な要素がある。それは･･･，

平方根　と　因数分解

一見，「方程式」とは関係なさそーなこれら２項目がちゃんと理解できていないと，二次方程式は解けない！！

★　平方根という用語の意味が分からない人
（「9 の平方根は？」と聞かれて正しく答えられない人)

★　教科書レベルの因数分解ができない人
（「x^2-5x+4 を因数分解しなさい」と言われて，パッと答えられない人)

は，あしたの数学！「第１章　**式の計算**」，「第２章　**平方根**」で復習しておくこと！！

･･･前置きはこのくらいにして，次のページから実際に二次方程式を解いてみるよ。

２．二次方程式と平方根

（１）$ax^2=b$ の解き方

まずは，一次の項を含まない形，すなわち，$ax^2=b$ のような形になる二次方程式を解いてみよう。1 ページの $x^2=9$ がこの形だね。式の意味を考えると･･･。

$x^2=9$　⇒ ある数 x を２乗したものは，9 に等しい。
　　　　⇒ ある数 x を **２乗すると 9 になる**。
　　　　⇒ ある数 x は，**9 の平方根**

$x=\pm 3$

あれっ？　これって，**ただの「平方根を求める問題」**じゃないか！

その通り。逆に言えば，ある数の**平方根を求めるとき，知らぬ間(ま)に二次方程式を解いていた**ことになる！　だったら，$ax^2=b$ の形の二次方程式は，$x^2=k$ **の形に持ち込み，k の平方根を求める**だけ！(k は両辺を a で割った後の右辺の数)

ただし，

◎　k の平方根には，**√を使わなくても表せるもの**(k が何かの２乗)
　　　　　　　　　　√を使わないと表せないもの(k が２乗以外の数)

の２通りがあること。

◎　k の平方根には，**正と負の２つがあること**(そのため，**二次方程式の解も２つある**ことになる。1 ページで「解を**すべて**求める」とあるのはこーゆーことなんだ)。

◎　**√の中の数はできるだけ簡単にすること**(分母の有理化を含む)

をお忘れなく。

［例題　１］

次の二次方程式を解きなさい。

① $x^2=16$　② $x^2=5$　③ $5x^2=60$

④ $x^2-20=0$　⑤ $4x^2-7=0$

［解］

① $x^2=16$　← x は「２乗すると 16 になる数」，つまり，「16 の平方根」。しつこく言うが，±を忘れるな！

$x=\pm4$

② $x^2=5$　← x は「２乗すると 5 になる数」，つまり，「5 の平方根」。

$x=\pm\sqrt{5}$

③ $5x^2=60$

$x^2=12$　← 両辺を 5 で割る。

$x=\pm\sqrt{12}$　← x は 12 の平方根。

$x=\pm2\sqrt{3}$　← $\sqrt{\ }$ の中の数を簡単にする。

④ $x^2-20=0$

$x^2=20$　← -20 を移項する。

$x=\pm2\sqrt{5}$　← x は 20 の平方根。慣れれば，$\sqrt{\ }$ の中の数を簡単にする計算と同時に済ませてもよい。

⑤ $4x^2-7=0$

$4x^2=7$　　← -7 を移項する。

$x^2=\dfrac{7}{4}$　　← 両辺を 4 で割る。

$x=\pm\sqrt{\dfrac{7}{4}}$　　← x は $\dfrac{7}{4}$ の平方根。

$\boldsymbol{x=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}}$　　← $\sqrt{\dfrac{7}{4}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}$

どう？　ここまで，そんなに難しくないでしょ。

（２）$(x+m)^2=n$ の解き方

次に出てくるのは，$(x+m)^2=n$ の形。

【例１】 $(x+2)^2=9$

この二次方程式を，キミならどう解くか？　見るからに**カッコを外したくなるが，ここはガマン**。$ax^2=b$ と同じ方法で解く方法を考えてみよう。

教科書などでは，$\boldsymbol{x+m}$ を**ひとかたまり**とみて，これを $\boldsymbol{X}$ に置き換え，

$(x+2)^2=9$

$X^2=9$　　← $x+2$ を X に置き換える。

$X=\pm3$　　← X のまま二次方程式を解く。

$x+2=\pm3$　　← X を $x+2$ にもどす。

としているが，いったん置き換えてまた元に戻すのって，**めんどくさくない？**

だったら，最初から，

$(x+2)^2=9$　　← 「$x+2$」は９の平方根。

$x+2=\pm3$

とした方が早いよね(以降，置き換えた式は省略します)。

この後，「$x+2=\pm3$」をどう処理するか？　左辺の＋２を移項するが，

$x+2=\pm3$

$x=-2\pm3$　**これを２つに分けて**

$x=-2+3$ より，$x=1$

$x=-2-3$ より，$x=-5$

$\boldsymbol{x=1,\ -5}$

【例２】$(x-4)^2=5$

面倒な置き換えをせずに，いきなり　$(x-4)^2=5$

$x-4=\pm\sqrt{5}$

とする。この後，左辺の－４を移項しておしまい。例１と違って，**これ以上計算できない**から。

$\boldsymbol{x=4\pm\sqrt{5}}$

［例題　２］

次の二次方程式を解きなさい。

① $(x-3)^2=16$　　② $(x+5)^2-7=0$

［解］

① $(x-3)^2=16$

$x-3=\pm4$　　←　このまま，$x-3$ の平方根を求める。

$x=3\pm4$　　←　$x=3+4$ と $x=3-4$ に分ける。

$\boldsymbol{x=7,\ -1}$

② $(x+5)^2-7=0$

$(x+5)^2=7$　　←　-7 を移項

$x+5=\pm\sqrt{7}$　　←　$x+5$ の平方根を求める。

$\boldsymbol{x=-5\pm\sqrt{7}}$　　←　$+5$ を移項しておしまい。

こらむ　平方完成

ここでは，$\boldsymbol{x^2+px+q=0}$ の形の二次方程式を，$\boldsymbol{(x+m)^2=n}$ に変形させて解くことを考えてみます。教科書ではビミョーな扱いですが，**高校数学に直結する重要なところ**ですので，学校でやらなかった人もガンバってマスターしてくださいね！（ただし，余力のない人は無理をしなくてもいいです)。

まずは，**平方公式を使った展開・因数分解**が理解できていることが前提となる。次のページの「平方公式」(ワザと m を使ってます）を元に，

$$\boldsymbol{x^2+6x-2=0} \qquad \boldsymbol{x^2-4x+1=0}$$

を，$(x+m)^2=n$ に変形させる方法を考えてみよう。

平方公式

展開後		展開前
$x^2+2mx+m^2$	$\Leftrightarrow$	$(x+m)^2$
$x^2-2mx+m^2$	$\Leftrightarrow$	$(x-m)^2$

もちろん，x^2+6x-2 も x^2-2x+3 も，このまま平方公式で因数分解できるわけじゃない。

けど，平方公式がちゃんと理解できている人は，無意識のうちに次のことがわかっているハズ。

$$x^2\pm\underbrace{2m}_{半分}x+m^2 \Leftrightarrow (x\pm\overbrace{m}^{2倍})^2$$

そこでだ。少々乱暴な言い方だが，**左辺の x^2 の項と x の項だけから，平方公式をでっち上げてしまおう**。つまり，

ア．$x^2+6x-2=0$ の，

$x^2+\underbrace{6}_{半分}x$ だけから x^2+6x+9 を想定し，$(x+3)^2$ をでっち上げる。

イ．$x^2-4x+1=0$ の，

$x^2-\underbrace{4}_{半分}x$ だけから x^2-4x+4 を想定し，$(x-2)^2$ をでっち上げる。

ただし，左辺の「x^2の項と x の項」を，そのまま「でっちあげた平方公式の形」に置きかえるわけにはいかない。そこで…。

【正面攻撃型】

$$x^2+6x-2=0$$

$x^2+6x=2$　　← **ワザワザ**-2を移項する。

$\boxed{x^2+6x+9}=2+9$　　← **平方公式**で因数分解できる形にするため，**いちいち**両辺に3^2，すなわち 9 を加える。

$\boxed{(x+3)^2}=11$　　← 左辺を因数分解

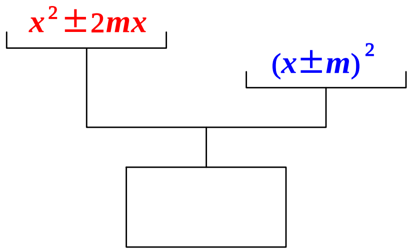
$x+3=\pm\sqrt{11}$　　← $x+3$ の平方根を求めて。

$$x=-3\pm\sqrt{11}$$

以上が教科書流の「一般的」な解説なんだけど，手順としてはかなり**めんどくさい**。そこで，少しスマート(？)な考え方を紹介しておきます。以下，8 ページからの続きです。

【省エネ型】

「**x^2の項と x の項**」と「**でっち上げた$(x\pm m)^2$**」とでは，**$(x\pm m)^2$の方が m^2だけ，(値が)大きくなってしまう。**



そこで，平方公式の形をでっち上げたら，直後に **m^2 を引いて，帳尻(ちょうじり)を合わせる**。結果として，

$$x^2\pm2mx=(x\pm m)^2-m^2$$

のように変形させることになるんだ。

ア．$x^2+6x-2=0$

x^2+6x だけから x^2+6x+9 を想定し，$(x+3)^2$ をでっち上げるが，
x^2+6x は x^2+6x+9 である$(x+3)^2$ よりも 9 小さいので，

$$\boxed{x^2+6x}-2=0$$

$$\boxed{(x+3)^2-9}-2=0 \qquad \leftarrow \text{でっち上げ＆帳尻合わせを同時に}$$

$$(x+3)^2-11=0 \qquad \leftarrow \text{数の項をまとめる。}$$

$$(x+3)^2=11 \qquad \leftarrow -11\text{ を移項}$$

$$x+3=\pm\sqrt{11} \qquad \leftarrow x+3\text{ の平方根を求めて。}$$

$$x=-3\pm\sqrt{11}$$

イ．$x^2-4x+1=0$ の，

x^2-4x だけから x^2-4x+4 を想定し，$(x-2)^2$ をでっち上げるが，
x^2-4x は x^2-4x+4 である$(x-2)^2$ よりも 4 小さいので，

$$\boxed{x^2-4x}+1=0$$

$$\boxed{(x-2)^2-4}+1=0 \qquad \leftarrow \text{でっち上げ＆帳尻合わせを同時に}$$

$$(x-2)^2-3=0 \qquad \leftarrow \text{数の項をまとめる。}$$

$$(x-2)^2=3 \qquad \leftarrow -3\text{ を移項}$$

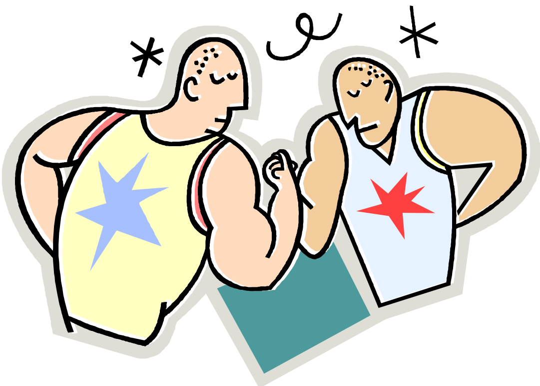
$$x-2=\pm\sqrt{3} \qquad \leftarrow x-2\text{ の平方根を求めて。}$$

$$x=2\pm\sqrt{3}$$

【正面攻撃】と【省エネ】を比べてみると，途中の計算式の数は同じ。ただし，後者は x^2 の項と x の項だけで値（あたい）の調整が自己完結（じこかんけつ）しちゃってるから，**この方がスピーディだ。**

このように，$x^2+px+q=0$ の形を，$(x+m)^2=n$ に変形させることを**平方完成**という(**平方**の形を**完成**させるから)。

これを $ax^2+bx+c=0$ の形に応用すると,「二次方程式の解の公式」になる。多くの教科書で「発展的内容」として収録(しゅうろく)されているので，興味のある人はぜひチャレンジしてみてください！



無料ダウンロード版はココまでです。
続きは有料版をごらんください。