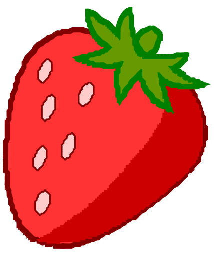
教科書完全マスターシリーズ

じっくり読むだけで，教科書のすべてが分かる！！

あしたの数学！

Math for Tomorrow！

中３　第1章　式の計算



考える学習をすすめる会

あさひ学習自由区 塾長　石田 和彦　著

考える学習をすすめる会

http://www.kangaeru.org/

は・じ・め・に

本シリーズは，その名の通り**教科書を完全にマスターすること**を目的とした，**基本重視**のテキストです。市販の解説書・参考書にくらべて，**圧倒的に分かりやすくていねいな説明**に心がけ，**じっくり読むだけで教科書のすべてが分かる自習用テキスト**を目指しました。

もちろん，**考える学習をすすめる会**のテキストですから，丸暗記やパターン練習ではなく，**用語の意味の理解**・**公式や定理の成り立ちの理解**・**解き方よりも考え方の理解**を重視しました。基本テキストでありながら，**本物の数学力**を養うことができます。

筆者 KAZU としては, 特に次のような諸君にこのテキストを活用していただきたいと思っています。

- ★ **数学はニガテだしキライ。でもできれば何とかしたい思っている人。**
- ★ **基礎からやり直したいけど，教科書を読んでもよく分からない人。**
- ★ **学校での進度に関係なく，自分でドンドン予習を進めたい人。**

「キミたちが**あしたの**ために，**数学**の勉強に本格的に取り組んでくれれば，やがて希望に満ちた未来へと道がひらける･･･」。そんな想いから，このテキストにあしたの数学！というタイトルをつけました。

Math for tomorrow ! 明るいあしたのために。さあ，**いっしょに始めましょう！！**

このテキストの使い方

① 用語の意味，考え方・解き方を１つ１つ確認しながら，**ゆっくり・じっくり**読んでください。**拾い読み・飛ばし読みは禁物**です。

② 最低でも**２回は繰り返して**読んでください。**１回読んだだけですべて理解できれば誰も苦労しませんよ**。

③ **例**と**例題**は，別の紙に書き写したり，解答・解説部分を隠したりして，**必ず自分でも解いてみましょう**。

④ このテキストは**解説中心**のため，**練習問題が収録されていません**。本書で理解したことがらを確認するため，手持ちの**教科書用ワークブック**などを使って**問題を解いてみましょう**。

このように使いこなせば，教科書範囲が指定された公立中学定期テストにおいて，**悪い点数は**取りたくても(？)**取れなくなります！**　「平均点にとどかない」と嘆いていた諸君は**楽勝で平均突破**を。平均点前後で伸び悩んでいた諸君は**70～80%の得点を目指して**がんばってください！

本シリーズで十分な基礎を身につけたなら，**ウロコ先生**の**目からウロコの数学講座シリーズ**へとステップアップしてください。トップクラスは目の前です！！

目　次

１．単項式と多項式の乗法・除法

「単項式，多項式ってな～に？」という人がいるといけないから，まずは用語の意味確認ね。

○　単項式 ・・・・・・ 数または文字だけの積でできている式

○　多項式 ・・・・・・ 単項式がいくつかくっついてできた式

単項式×多項式，多項式×単項式の計算では，**分配法則**を使ってカッコを外す。教科書では，

【例 1】 $4a\,(2x-5y) = 4a\times 2x+4a\times(-5y)$

【例 2】 $-3a\,(a+2b) = -3a\times a+(-3a)\times 2b$

のように，**途中の計算をゴチャゴチャと書いている**が，こいつらは**不要**！！
手間がかかる上，かえって符号のミスを招きやすい。そもそも，**こんなものを書いても楽しくない！！**

そこで…。

> 1．**それぞれの項を○で囲む**。ただし，多項式の２つめ以降の項は，**必ず符号(＋，－)をセット**で。
>
> 2．「↷」の部分の掛け算を**暗算**で。バラして掛けたときの各項の**符号(＋か－か)に注意**すること！

次のページのようにリズミカルに掛けていった方が気持ちいいでしょ。それに，この程度の計算は，**暗算でできるように**しないと話にならないからね。

【例 1'】$4a\,(2x-5y) = \mathbf{8ax-20ay}$

$4a\times 2x=8ax$

$4a\,(2x\;\;-5y)$

$4a\times(-5y)=-20ay$

【例 2'】$-3a\,(a+2b)$

$-3a\times a=-3a^2$

$-3a\,(a\;\;+2b) = \mathbf{-3a^2-6ab}$

$-3a\times 2b=-6ab$

ここまでいいかな。では，$\frac{2}{3}x\ (15x+9y)$ のように，分数が混じっていたらどーするか？　途中の計算を書かずにバラして掛ける点に変わりはないが，多少の無理は承知（しょうち）の上で，**がんばって暗算**で仕上げてしまおう(キツイ人は,「分数の掛け算」部分だけ紙の空いている所で)。

【例 3】$\frac{2}{3}x\,(15x+9y) = \mathbf{10x^2+6xy}$

$\frac{2}{3}x\times 15x=10x^2$　・・・　$\frac{2}{\cancel{3}_{1}}x\times \cancel{15}^{5}x$

$\frac{2}{3}x\,(15x\;\;+9y)$

$\frac{2}{3}x\times 9y=6xy$　・・・　$\frac{2}{\cancel{3}_{1}}x\times \cancel{9}^{3}y$

次に，多項式÷単項式の計算。これも**分配法則**を使ってカッコを外すが，教科書の**分数に直す途中の計算式は，**ハッキリ言って**ウザイ**。

【例 4】$(6a^2-2a)\div 2a\ =\ \dfrac{6a^2}{2a}-\dfrac{2a}{2a}$

【例 5】$(12x^2y+8xy)\div(-4xy)\ =\ -\dfrac{12x^2y}{4xy}-\dfrac{8xy}{4xy}$

ワザワザ分数に直して約分しているヒマがあったら，バラして割って**暗算で仕上げた方が小気味（こきみ）よい**。

【例 4’】$(6a^2-2a)\div 2a\ =\ \boxed{\mathbf{3a-1}}$

$6a^2\div 2a=3a$

$(6a^2\ \ -2a)\div 2a$

$-2a\div 2a=-1$

【例 5’】　$(12x^2y+8xy)\div(-4xy)\ =\ \boxed{\mathbf{-3x-2}}$

$12x^2y\div(-4xy)=-3x$

$(12x^2y\ \ +8xy)\div(-4xy)$

$8xy\div(-4xy)=-2$

では，例によって，$(2x^2+4xy)\div\dfrac{2}{3}x$ のように，**分数**が混じったらどーするか？　ここはおとなしく，割り算を，**逆数を掛ける**形に直して考えよう。その前に･･･。

(ある数の)**逆数**とは，**その数と掛けたら１になる数**。「**分母と分子を逆にした数**」だと思っている人が多いが，これは**逆数の求め方**であって，逆数の定義(ていぎ)ではない！

そういう人に限って，「$\frac{2}{3}x$ の逆数は $\frac{3}{2}x$ だ」などと**平気で間違える**。が，これらを**掛けても１にならない**でしょ。

$\frac{2}{3}x=\frac{2x}{3}$ としてから分母・分子を逆にし，$\frac{3}{2x}$ が正しい。

【例 6】$(2x^2+4xy)\boxed{\div\frac{2}{3}x}=(2x^2+4xy)\boxed{\times\frac{3}{2x}}=\mathbf{3x+6y}$

逆数を掛ける

$2x^2\times\frac{3}{2x}=3x$　・・・　$\overset{1}{\cancel{2}}x^{\overset{1}{\cancel{2}}}\times\frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}\underset{1}{\cancel{x}}}$

$(2x^2+4xy)\times\frac{3}{2x}$

$4xy\times\frac{3}{2x}=6y$　・・・　$\overset{2}{\cancel{4}}\overset{1}{\cancel{x}}y\times\frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}\underset{1}{\cancel{x}}}$

こらむ　例６を暗算でやるには…

単項式÷単項式では，**係数だけ・文字だけで割り算をしてから掛け合わせて**も同じ結果になる。

$$\underbrace{\overbrace{8a^2b \div 2a}^{8\div2=4}}_{a^2b\div a=ab} = 4\times ab = 4ab$$

すると，例６のようなケースも，

$(2x^2+4xy)\div\frac{2}{3}x$ を，このまま $(2x^2+4xy)\div\frac{2}{3}x$ とバラして割り，

$$\underbrace{\overbrace{2x^2\div\frac{2}{3}x}^{2\div\frac{2}{3}=3}}_{x^2\div x=x} = 3x \qquad \underbrace{\overbrace{4xy\div\frac{2}{3}x}^{4\div\frac{2}{3}=6}}_{xy\div x=y} = 6y$$

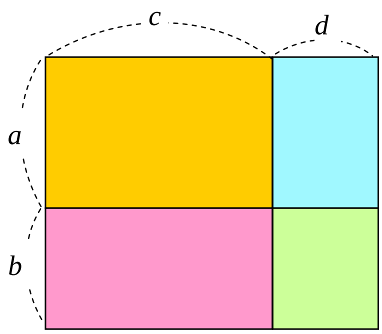
として，一気に $3x+6y$ と求めることもできる。書くと長くなるが，**割り算のそれぞれの項を目で追っていく**と，アッという間にできてしまう。自信のある人は試してみてね。

２．多項式の乗法

多項式どうしの乗法，例えば，$(a+b)(c+d)$ を計算するには，次のような解説が一般的だ。

ア．面積的に考える

縦 $a+b$，横 $c+d$ の長方形の面積を求めると，



$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

イ．多項式を１つの文字に置きかえる

$(a+b)(c+d)$ で，$c+d$ を M とすると，

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= (a+b)M\\ &= aM+bM\\ &= a(c+d)+b(c+d)\\ &= ac+ad+bc+bd\end{aligned}$$

このように，**積(掛け算)の形の式を**計算して，**和(たし算)の形にすることを**，もとの式を**展開**(てんかい)**する**という(「多項式×多項式」だけでなく，「単項式×多項式」の計算も展開という)。

では，実際に式を展開してみよう。その前に注意事項。教科書では，上の**イ**をベースとした**途中の計算式をゴチャゴチャと書く方法**が載(の)っている。

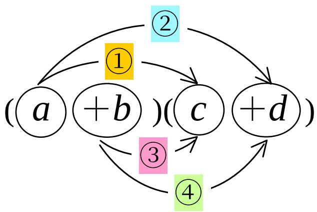
【例 1】$(x-2)(y+5) = \mathbf{x(y+5)-2(y+5)}$

【例 2】$(2a+5b)(3a-4b) = \mathbf{2a(3a-4b)+5b(3a-4b)}$

のように。

しか～し！　絶対に**この書き方に慣れてはイケナイ！！**　理由は１ページと同じである。

多項式の乗法では，下のように**それぞれの項をバラして掛け合わせた**ときと同じ結果になる。**途中の計算を書かずに**バラバラに掛けて，**イッパツで展開**してしまおう！(「〇数字」は，掛け合わせた順番を表す)。



$$=\overset{①}{ac}+\overset{②}{ad}+\overset{③}{bc}+\overset{④}{bd}$$

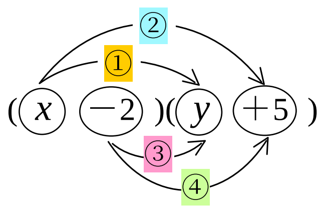
ホントは，この**バラして掛けるやり方にも慣れてほしくない**んだ。「**公式を使った展開**」，後で出てくる「**因数分解**」に悪い影響がでるからね。

マア，それなりに練習してみよう。

【例 1'】　$(x-2)(y+5)$

$= \boldsymbol{xy} \ \boldsymbol{+5x} \ \boldsymbol{-2y} \ \boldsymbol{-10}$

バラして掛けただけでおしまい。



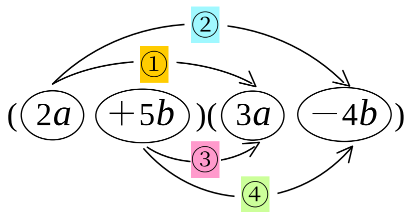
【例 2'】　$(2a+5b)(3a-4b)$

$= 6a^2 \ \underbrace{-8ab \ +15ab}_{}$ $-20b^2$

これで終わりではない！

同類項をまとめる。

$= \boldsymbol{6a^2+7ab-20b^2}$



バラして掛けた項に**同類項があるときは，必ずまとめておく**こと。

３．乗法の公式

多項式の乗法のうち，**よく使われる形・特徴的な形**のものは**公式**化されている。教科書などでは次のようにまとめられているが…。

乗法の公式

○ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

○ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

○ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

ところで…。公式と言えば，

★　**がんばって，丸暗記しよう。**

★　**当てはめて，使いこなせればそれでいいや。**

などと思い込んでいる人が多い。**トンデモない話だ！！**　なぜならば，

☆　この程度の数ならば暗記も可能だろう。が，**高校では公式や定理の数がグワッと増える**。いずれ，**丸暗記では乗り切れなくなる**。

☆　な～んにも考えず，機械的に与えられた公式に当てはめるだけ。これじゃあ，**面白くもなんともない！**

からね。

最も大切なのは，**公式(や定理)が，どのように成り立ったのかを理解する**こと。これができないと，本当の意味で「公式を使いこなした」ことにはならないぞ！！

ジツは，上の公式はすべて，$\boxed{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab\ \text{の形をベース}}$としている。まずは，この公式からじっくりみていくことにしよう。

バラして掛けた場合と比べながら考えてみるよ。

（1）足して・掛けての公式　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

【例 0】$(x+a)(x+b) = \mathbf{x^2+(a+b)x+ab}$

①　②　③　④

$(x+a)(x+b) = x^2 + bx + ax + ab$　← ②と③は必ず**同類項**になる。

$= x^2+(a+b)x+ab$　← だったら，最初から同類項をまとめちゃおう。

①と④はそのまま残る。

この公式は，**②と③の掛け算によって生じる同類項を，最初からまとめてしまったもの**である。**①と④はバラして掛けたときと全く変わらない。**

その結果，**x の係数**は，**a と b の和**
数の項は，**a と b の積**
になっている。

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

足したもの　掛けたもの

なお，なぜかこの公式には名前が付いていないので，勝手に，「**足して・掛けての公式**」とネーミングしちゃうことにしよう。

初心者がこの公式でとまどうのは，**a や b が負の数の場合**。**公式に当てはめた式**を書くとき。

〇　$(x+3)(x+5)$ なら，$(x+3)(x+5) = x^2+(3+5)x+3\times5$ とスムーズだが，

〇　$(x-3)(x+5)$ だと，$(x-3)(x+5) = x^2 \cdots$ アレッ？ 符号はどーなるの？

なんてことになっちゃんだろうね。

そもそもさぁ，**なんで公式に当てはめた式を書くの？**　公式の本来の目的は，**同類項をまとめる手間を省き，イッパツで展開するため**だ。こんなものをイチイチ書いていたら，**バラして掛けるのと同じくらい手間が掛かる**。これじゃあ，「公式」を使う意味がない！！

「足して・掛けての公式」を使って展開するときは，当てはめた式など書かずに，

> ア．最初の項は，**バラして掛けたときの①と同じ**なんだ。
>
> イ．まん中の項は，**同類項をまとめる計算を先に済ませている**んだ。
>
> ウ．最後の項は，**バラして掛けたときの④と同じ**なんだ。

ということを，つねに意識しながら進めていこう。

①

【例 1】$(x-3)(x+5) = x^2 +2x -15$

たして $+2$（同類項の係数）　かけて -15（④）

①

【例 2】$(x-4)(x-1) = x^2 -5x +4$

たして -5（同類項の係数）　かけて $+4$（④）

（２）**平方公式**　$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

同じ多項式の**平方**(２乗)の形をしているから**平方公式**と呼ばれるが，ふつうの平方公式と上のワク内とでは，**使われている文字が違う**点に注意してほしい。

$(x+a)(x+b)$ の「b」を「a」にかえると，$(x+a)(x+a)=(x+a)^2$ となるでしょ。こう見ると，**平方公式って「足して・掛けての公式のバリエーション」**にすぎないのだ！

【例 0】$(x+a)^2=(x+a)(x+a)$

$= x^2+2ax+a^2$

$$\begin{array}{ccccc} & ① & ② & ③ & ④ \\ (x+a)(x+a) = & x^2 & +ax & +ax & +a^2 \end{array}$$

← ②と③の同類項は，必ず**同じ項が２個**できる。

$$= x^2+2ax+a^2$$

← だったら，最初から２倍しちゃおう。

①と④はそのまま残る。

この公式でも，「**②と③の同類項を最初からまとめたもの**，**①と④はバラして掛けたときと同じ**」である。**たまたま，②と③による x の項が全く同じもの**なので，和$(a+b)$ではなく，**積$(2a)$の形**になっているだけだ。

だからこそ，「平方公式は，足して・掛けての公式のバリエーションにすぎない」と書いたのだが，残念ながらこの見方だけでは，**平方公式「全般」には対応できない！**　$(x+4)^2$ だったら問題ないが，$(2a-3b)^2$ のように，**文字が２種類**あったり，**文字の前に係数**があったりする形もあるからだ。そこで，

ア．最初の項 ・・・・・・ バラして掛けたときの①と同じ。 $(x+\ )(x+\ )$

⇒ **カッコ内の前の項を２乗** x^2

イ．まん中の項 ・・・・ 全く同じ項が２個生じるので，２倍。 $(x+a)(x+a)$

⇒ **カッコ内の２つの項を掛けて２倍** $ax\times 2$

ウ．最後の項 ・・・・・・ バラして掛けたときの④と同じ。 $(\ +a)(\ +a)$

⇒ **カッコ内の後の項を２乗** a^2

平方公式においては，これらを強く意識しながら展開するようにしよう。

２つの項を掛けて２倍

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

前の項の２乗　　後の項の２乗

また，平方公式の場合，後の項が**＋の場合**・**－の場合**の２種類がある。このとき，下のように，**符号の影響を受けるのはまん中の項だけ**であることを知っておいてもらいたい。

$$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 \boxed{+2ax} \boxed{+a^2}$$

$\boxed{+2ax}$ ← $(+ax)\times 2$，$\boxed{+a^2}$ ← $(+a)^2$

$$(x-a)^2 = (x-a)(x-a) = x^2 \boxed{-2ax} \boxed{+a^2}$$

$\boxed{-2ax}$ ← $(-ax)\times 2$，$\boxed{+a^2}$ ← $(-a)^2$

しつこく言うが，ここでも**公式に当てはめた式**なんて書かないよ。
特に，$(x+3)^2 = x^2+2\times x\times 3+3^2$ の「$+2\times x\times 3$」の部分がガマンできない！
これじゃあ，**機械的に当てはめているだけではないか！**　こんなことをしているから，「平方公式で展開したときの『２』って，どこから来たのか？」と聞かれても答えられない人が後を絶たないのだ！

12 ページのワク内を考えながら，イッパツで展開できるように。

①　前の項の２乗　　２つの項を掛けて２倍　$x\times4\times2$

【例 1】$(x+4)^2 = \mathbf{x^2}\ \mathbf{+8x}\ \mathbf{+16}$

④　後の項の２乗

①　前の項の２乗　　２つの項を掛けて２倍　$a\times(-5)\times2$

【例 2】$(a-5)^2 = \mathbf{a^2}\ \mathbf{-10a}\ \mathbf{+25}$

④　後の項の２乗　$(-5)^2$

①　前の項の２乗　　２つの項を掛けて２倍　$x\times2\times2$

【例 3】$(x+2y)^2 = \mathbf{x^2}\ \mathbf{+4xy}\ \mathbf{+4y^2}$

④　後の項の２乗　$(+2y)^2$

①　前の項の２乗　$(2a)^2$　　２つの項を掛けて２倍　$2a\times(-3b)\times2$

【例 4】$(2a-3b)^2 = \mathbf{4a^2}\ \mathbf{-12ab}\ \mathbf{+9b^2}$

④　後の項の２乗　$(-3b)^2$

（３）和と差の積の公式　$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

多項式の２つの項が**和**$(x+a)$と**差**$(x-a)$を掛けた形(**積**)になっているから**和と差の積の公式**と呼ばれるが，これも，ふつうの書き方と上のワク内とでは，**使われている文字が違う**。

$(x+a)(x+b)$ の「$+b$」を「$-a$」にかえると，$(x+a)(x-a)$ となるでしょ。このように，**乗法の公式は「足して・掛けての公式のバリエーション」**なのだ！

例によって，この公式の成り立ちを調べてみると…。

【例 0】$(x+a)(x-a)=$ $\boldsymbol{x^2-a^2}$

$$(x+a)(x-a)=\overset{①}{x^2}\ \overset{②}{-ax}\ \overset{③}{+ax}\ \overset{④}{-a^2}$$

← ②と③の同類項は，**打ち消し合って消滅する**。

$$=x^2\qquad\quad -a^2$$

← だったら，最初から**何も書く必要がない**。

①と④はそのまま残る。

結局，どの公式でも，「**②と③の同類項を最初からまとめたもの**，**①と④はバラして掛けたときと同じ**」である。和と差の積の公式では，**たまたま，②と③による x の項がなくなってしまう**ので，両端の項しか残らない。

平方公式同様，これだけでは$(2a+3b)$ $(2a-3b)$のような形には対応できないが，

ア．$\boxed{\text{最初の項}}$ ・・・・・・ バラして掛けたときの①と同じ。　$(x+\ )(x+\ )$

⇒ **前の項を２乗**　x^2

イ．$\boxed{\text{まん中の項}}$ ・・・・ 同類項をまとめると**消滅**する

ウ．$\boxed{\text{最後の項}}$ ・・・・・・ バラして掛けたときの④と同じ。　$(\ +a)(\ -a)$

⇒ **マイナス・後の項を２乗**　$-a^2$

のように意識していれば，ダイジョーブだよね。

① 前の項の２乗

【例 1】$(x-6)(x+6)=x^2-36$

④ マイナス・後の項の２乗　-6×6

① 前の項の２乗　$(2a)^2$

【例 2】$(2a+3b)(2a-3b)=4a^2-9b^2$

④ マイナス・後の項の２乗　$3b\times(-3b)$

ここまでが乗法の公式。長くなっちゃったけど，**すっごく大事だから**じっくり読んでマスターしてね。