２００６年　長野県 数学　解答と解説

【問１】

（１）$3-5=$ $\mathbf{-2}$

（２）$-56\div 7=$ $\mathbf{-8}$

（３）$-9+\boxed{6\times\frac{2}{3}}$

かけ算が先

$=-9+4$

$=$ $\mathbf{-5}$

（４）$\boxed{\sqrt{45}}-\sqrt{5}$

ルートの中の数を外へ出す。

$=3\sqrt{5}-\sqrt{5}$

$=$ $2\sqrt{5}$

（５）$8a-7b-2(a+3b)$

$-2\times a$

$-2\,(\,a\;\;+3b)$　←　分けてかけ，カッコをはずす。**符号に注意**

$-2\times(+3b)$

$=8a-7b-2a-6b$

$=8a-2a-7b-6b$

$=$ $\mathbf{6a-13b}$

（６）$x^2-5x-6=$ $\mathbf{(x+1)(x-6)}$　　かけて-6，たして-5

（７）$\begin{cases} x-y=10 & \cdots ① \\ x=3y-2 & \cdots ② \end{cases}$

「代入法で解いてくれ！」と言わんばかりの形をしているのだから，ムリに加減法を使う必要はない。

②を①へ代入　$3y-2-y=10$

$2y=12$

$y=6$

これを②へ代入　$x=18-2$

$x=16$

$\mathbf{(x,\ y)=(16,\ 6)}$

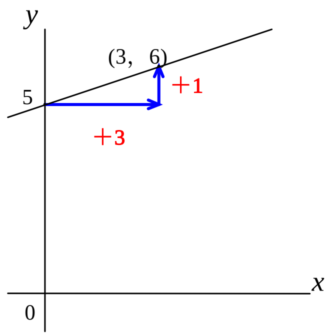
（8）表をもとに，右のようなグラフをフリーハンドでかいてみよう。

・点(0，5)を通るから，切片は 5。

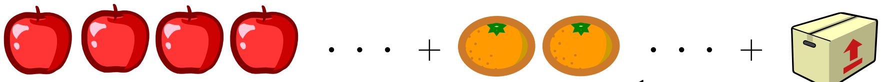
・3(右へ)行って 1 上がっているから，

傾きは $\dfrac{+1}{+3}=\dfrac{1}{3}$

よって，$y=\dfrac{1}{3}x+5$



（9）りんごの個数を x 個とすると，みかんはその半分だから $\dfrac{1}{2}x$ 個となる。



1 個 70 円が x 個　＋　1 個 40 円が $\dfrac{1}{2}x$ 個　＋　100 円

$70x+40\times\dfrac{1}{2}x+100=1900$

$\cancel{70x}+\cancel{20x}=\cancel{1800}$　両辺を 10 で割って

$9x=180$

$x=20$

20 個

（10）問題の図(4 枚だけ重ねたもの)をよく見ると…

① 何枚重ねても，一番上の正方形は  で，面積は 4 cm^2 (2×2)

② 2 枚目から一番下までの正方形は  で，面積は 3 cm^2 (2×2−1×1)

①は 1 枚だけ，②は残り全部となるから，25 枚重ねたときの面積は，

4＋3×24＝76

76 cm^2

（11）△BAE は二等辺三角形になるから，

AB＝BE＝6.5cm　・・・　①

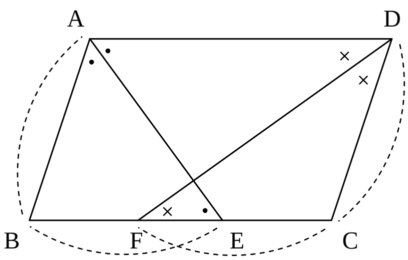
∠BAE＝∠DAE(仮定)

∠DAE＝∠BEA(平行線の錯角)より，

∠BAE＝∠BEA

2 角が等しいので，△BAE は

二等辺三角形。よって，AB＝BE。

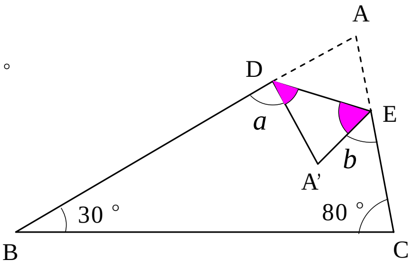


△CDF も同様に(×印を付けた角はすべて等しい)二等辺三角形になるから，
　CD＝CF＝6.5cm　・・・　②

　ここからは，自分で図に書き入れながら…。
BE＝CF＝6.5cm，BC＝10cm だから，EF は **6.5cm２本が重なった部分**である。
　よって，EF＝6.5×2－10＝3

(12)「∠a＋∠b の大きさ」となっている点に注意！　和が何度になるのかを考えればよい。

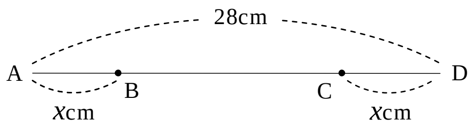
∠A'＝∠A＝180°－(30°＋80°)＝70°
よって，∠ADE＋∠AED＝180°－70°
　右の図のピンクの部分 ↲　＝110°



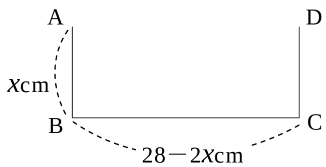
四角形 DBCE の内角の和は 360°
だから，
30°＋∠a＋110°＋∠b＋80°＝360°
　　　　∠a＋∠b＋220°＝360°
　　　　　　∠a＋∠b＝140°

【問２】

（1）①　右の図の通り。
　　　BC＝**28－2x**



②（ア）**x(28－2x)＝80**



　（イ）アを解いてみる。このとき，28－2x＝2(14－x)とし，両辺を 2 で割ると計算がラク。

x(28－2x)＝80

$$2x(14-x)=80$$ ← 2をくくりだして,

$$x(14-x)=40$$ ← 両辺を2で割る。

$$14x-x^2-40=0$$ ← カッコはずし&移項

$$x^2-14x+40=0$$ ← 並べかえて，両辺に−1をかける。

$$(x-4)(x-10)=0$$ ← 左辺を因数分解

$$x=4,\ 10$$

よって，AB＝4cm のとき，BC＝20cm，

AB＝10cm のとき，BC＝8cm　となるが，

AB が BC よりも短くなるときだから，**AB＝4cm**

（2）① 「C で止まる場合だけ」をさがしてもいいが，どうせ②で確率を求めるのだから，先に樹形図をかき「どこで止まるか？」も同時にチェックする。

・点 P が頂点 **A で止まる**のは，表の合計が「**3 の倍数**」のとき

・点 P が頂点 **B で止まる**のは，表の合計が「**3 の倍数＋1**」のとき

・点 P が頂点 **C で止まる**のは，表の合計が「**3 の倍数＋2**」のとき

表を○，裏を×とすると，

1円	5円	10円		
○	○	○	・・・ 1＋5＋10＝16	→ B で止まる
		×	・・・ 1＋5＝6	→ A で止まる
	×	○	・・・ 1＋10＝11	→ C で止まる
		×	・・・ 1	→ B で止まる
×	○	○	・・・ 5＋10＝15	→ A で止まる
		×	・・・ 5	→ C で止まる
	×	○	・・・ 10	→ B で止まる
		×	・・・ 0	→ A のまま

よって，C で止まるのは，**○×○**　または　**×○×**

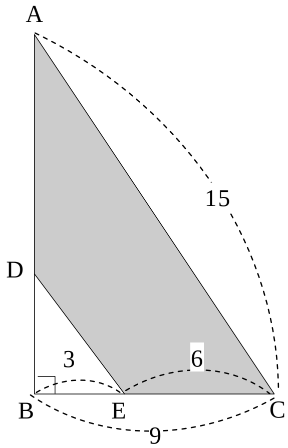
② ①の樹形図より，全部で 8 通り，B で止まるのは 3 通り あるから，
求める確率は $\frac{3}{8}$

（3）① 右の図(単位は略)で，**三平方の定理**より，

$AB^2 = AC^2 - BC^2$

$= 15^2 - 9^2$

$AB = 12$（$AB>0$ より）



△ABC∽△DBE（DE//AC より）だから，

DB：BA＝BE：BC

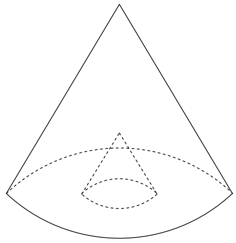
DB：12＝3：9

$9DB = 36$

$DB = 4$ 4cm

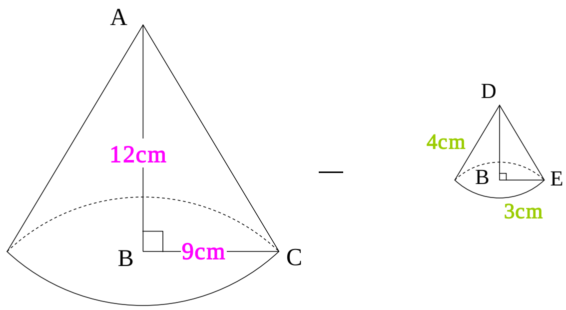
［別解］ こんなクソ面倒なことをしなくても，辺の比が **3：4：5 の直角三角形**を知っていれば，DB＝4cm とイッパツで求められる(△ABC の各辺はその 3 倍，△DBE は△ABC の $\frac{1}{3}$ だから，元にもどって，辺の比は 3：4：5)。

② 四角形 ADEC を，直線 AD を軸として 1 回転させた立体は右の図のようになる。



その体積は，

$\boxed{\text{AB を軸に 1 回転させてできる円錐の体積}} - \boxed{\text{DB を軸に 1 回転させてできる円錐の体積}}$



$9^2\pi \times 12 \times \frac{1}{3} - 3^2\pi \times 4 \times \frac{1}{3} = 324\pi - 12\pi = 312\pi$ 　　$312\pi \text{cm}^2$

【問３】

（１）図中の xcm のところへ，x＝2 を代入するだけ。**オイシイ問題だ！**

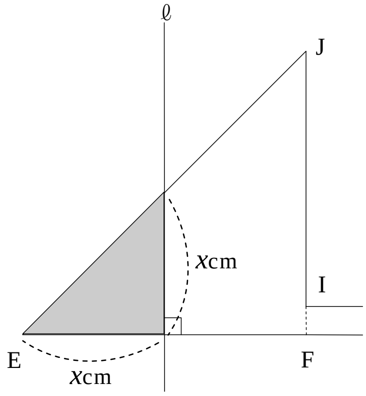
図形ア・・・4×2＝**8** (cm^2)

図形イ・・・$2\times2\times\frac{1}{2}$＝**2** (cm^2) 図形イは直角二等辺三角形なので，底辺と高さが等しい。

（２）0≦x≦10 のとき，塗りつぶされた部分は，**底辺・高さとも xcm の直角二等辺三角形**である。マトモに考えると，

$y=x\times x\times\frac{1}{2}$

$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x^2}$



［別解　初級］ x＝0 のとき，x＝1 のとき … と，⑴のイと同様，y の値をチマチマ求める(x＝10 まで)。一部を表にすると，

x	0	1 $\frac{1}{2}$	2	…	10
y	0		2	…	50

これをもとに x＝10 までの**グラフを先にかいてしまう**。グラフが放物線になることから，$y=ax^2$(2 乗に比例する関数)。これに適当な x，y の値を代入し，式を求める。

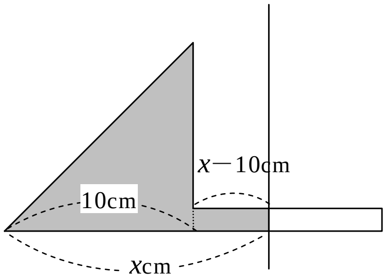
［別解　上級］ 変域内の始点(x＝0 のとき，y＝0)と終点(x＝10 のとき，y＝50)のみ値を求め，**先にグラフをかいてしまう**。

この場合，底辺・高さとも変化する量なので，**変化×変化＝(変化)^2** となり，**二次関数(2 乗に比例する関数)**であることが分かる。ここまで確認したら，あとは $y=ax^2$ に x＝10，y＝50 を代入するだけ。アッという間にできあがりだ！！

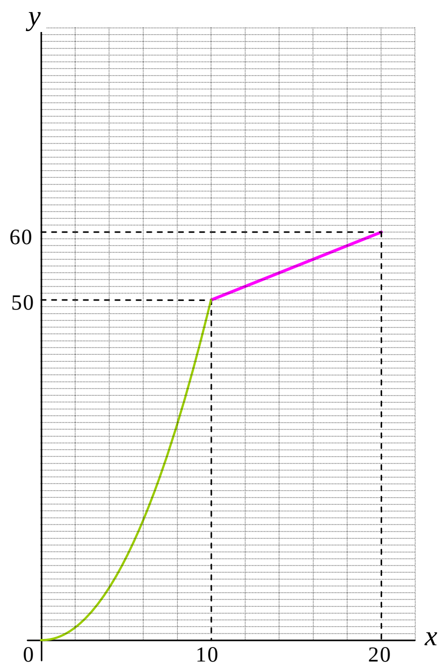
いずれにしても，先にグラフをかくこと。**「式が分からないとグラフがかけない」というのは思い込みにすぎない。**

（3）$0 \leqq x \leqq 10$ の範囲では，$y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフをかけばよい **(下のグラフの黄緑の部分)**。

のので，$10 \leqq x \leqq 20$ の場合を考えてみる。ただし，**先に式を求めようとすると**右下の図のようになり，**非常に分かりにくい** ($y=10\times10\times\frac{1}{2}+1(x-10)$ となる)。



[別解　初級] $10 \leqq x \leqq 20$ では，塗りつぶされた部分の面積 y＝△JEF の面積＋長方形となるから，$x=11$ のとき，$y=50+1\times1=51$ という感じでチマチマと求め，グラフを完成させる。地道で時間が掛かる方法だ。



[別解　上級] 変域内の始点と終点の y の値を求めると，

$x=10$ のとき，$y=50$

(△JEF の面積。$10\times10\times\frac{1}{2}$)

$x=20$ のとき，$y=60$

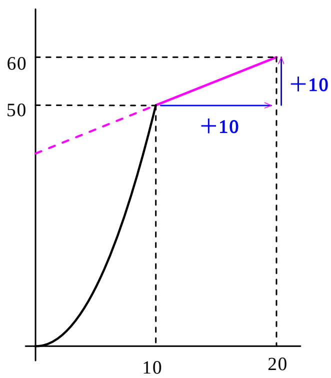
(△JEF の面積＋長方形 IFGH の面積。$50+1\times10$)

この場合，**変化する量は１つ**(長方形 IFGH の横の長さ)**だけだから，一次関数になる**。

よって，点(10，50)，(20，60)をとって，直線を引くだけで出来上がり！

(右のグラフのピンクの部分)

式を求めるときはグラフを活用する(右の図。なお，⑶はグラフをかくだけだが，⑷では式が必要)。

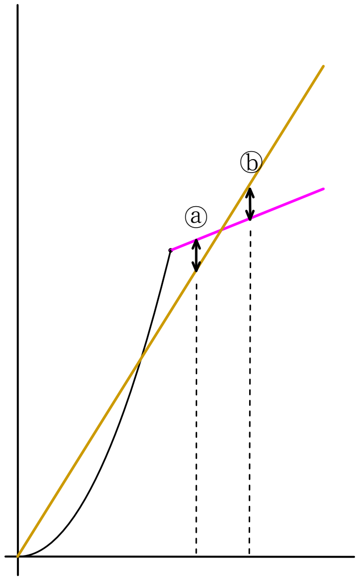


ピンクの直線の傾きは，$\frac{+10}{+10}=1$。

左の点線をたどると，切片から 10 右へ行って 10 上がっている。よって，

切片は 50 から 10 下がった 40。

直線の式は，$y=x+40$ となる。



（４）なぜ，グラフ用紙に，最初から図形アのグラフがかかれているのか？　アとイの塗りつぶされた部分の**面積の差を，グラフから見当をつけるためだ。**

右のグラフをみると，**面積の差が** 5 cm^2 **になるのは，↕ で示した，ⓐ・ⓑ の２ヵ所。**

「直線 ℓ が辺 IH と交わる範囲」だから，$10 \leqq x \leqq 20$ であることに注意！

ⓐ，ⓑ それぞれにおける x の値を求めるには，**図形アの直線の式**と**図形イの直線の式**が必要だ。**ア**は $y=4x$，**イ**は $y=x+40$ となる。

ⓐ・・・グラフより，$\boxed{\text{イの面積 } x+40}$ は $\boxed{\text{アの面積 } 4x}$ より 5 大きいから，

$(x+40)-4x=5$　これを解いて，

$$x=\frac{35}{3}$$

ⓑ・・・グラフより，$\boxed{\text{アの面積 } 4x}$ は $\boxed{\text{イの面積 } x+40}$ より 5 大きいから，

$4x-(x+40)=5$　これを解いて，

$$x=15$$

$\frac{35}{3}$，15

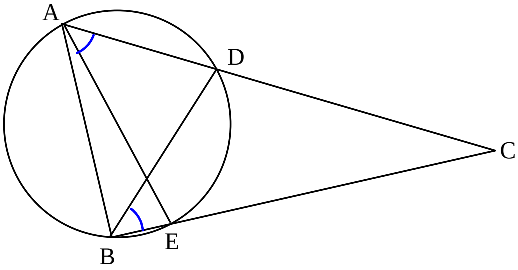
グラフを徹底活用して，このような**「動点問題」をスイスイと解きたい**人は，ウロコ先生の

目からウロコの数学講座　中学関数編（文理）

をぜひお買い求めください。

【問４】

（１）仮定や定理などから**等しいと言い切れる辺や角には必ず印を付ける**こと。(ただし，右の図では必要なものしか書き込んでいない)。



また，⑵の解説にあるような，２つの三角形を分離した図をフリーハンドでかいてみるのもよい。

(この場合，同じ形に見えるようにするには，一方を裏返す必要がある)

［証明］

△AEC と△BDC で，

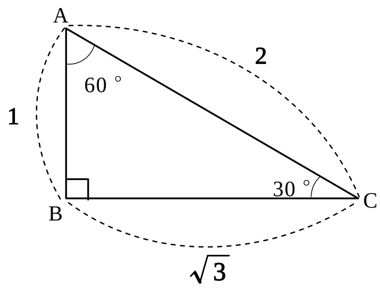
∠ACE＝∠BCD（共通）・・・①

∠EAC＝∠DBC（$\overset{\frown}{DE}$ に対する円周角）・・・②　← 上の図の青印の角

①，②より，２組の角がそれぞれ等しいので，

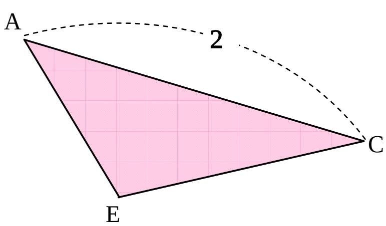
△AEC∽△BDC

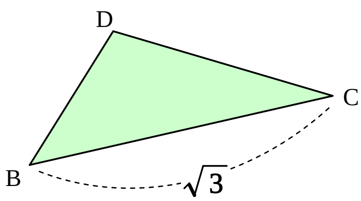
（２）30˚，60˚，90˚の直角三角形の辺の比は右の図のとおり。



△AEC∽△BDC から，下の図のように，**AC と BC が対応する辺**になる。

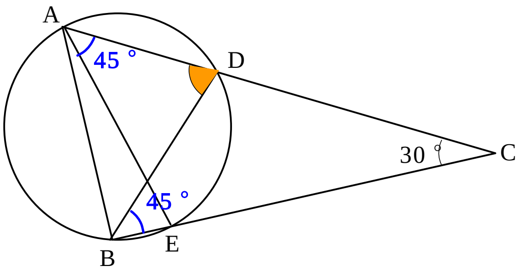
よって，相似比は，AC：BC＝$2:\sqrt{3}$





証明をすっ飛ばしたとしても，△AEC∽△BDC を前提にチャレンジが可能な問題である。

（３）① ⑴が解けた人や $\overset{\frown}{DE}$ に対する円周角に気づいた人への「ご褒美（ほうび）」のような問題だ。



∠CAE＝∠DBC＝45° ← 右の図の青印の角。$\overset{\frown}{DE}$ に対する円周角。

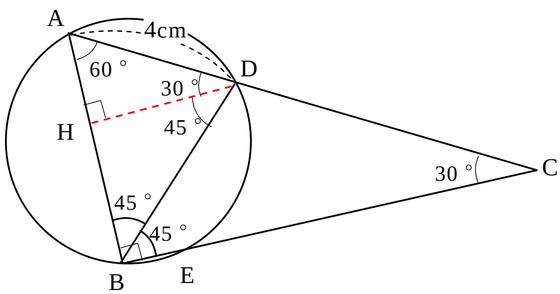
∠ADB＝∠DBC＋∠DCB ← 三角形の１つの外角は，となりにない２つの内角の和に等しい。

＝45°＋30°

＝**75°**

② **D から AB に垂線を引き**，AB との交点を H とする。

これによって，問題文の∠**CAE＝45°**と①で求めた∠**CAE＝75°**とをベースに，それぞれの三角形の角の大きさを瞬時に求めることができる(上の図)。



● △AHD は 30°，60°，90°の直角三角形。

辺の比は AH：HD：AD＝1：$\sqrt{3}$：2。← 比

AD＝4cm だから，＝2：$2\sqrt{3}$：4 ← 単位は cm

よって，面積は，$2\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$cm²

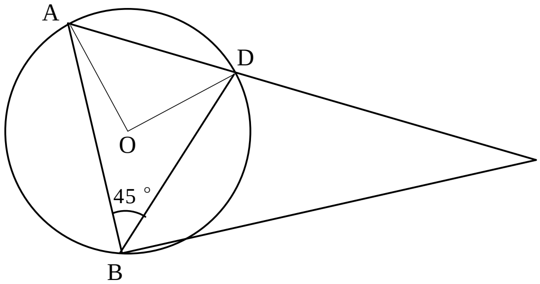
● △HBD は直角二等辺三角形。

辺の比は HB：HD：BD＝1：1：$\sqrt{2}$。HD＝HB＝$2\sqrt{3}$ cm。

よって，面積は，$2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=6$cm²

△ADB＝△AHD＋△HBD＝**$2\sqrt{3}+6$ cm²**

③　弧の長さを求めるには，**半径**と**中心角**が必要。円の中心を O とすると，



● 中心角

$\angle$ABD($\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角)＝45°だから，

$\angle$AOD($\overset{\frown}{AD}$ に対する中心角)＝90°

● 半径

△OAD は直角二等辺三角形($\angle$AOD＝90°，OA＝OD より)だから，

OA：AD＝1：$\sqrt{2}$。AD＝4cm だから，

OA：4＝1：$\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$OA＝4

$$\text{OA}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

よって，$\overset{\frown}{AD}$ の長さは，

$$2\times2\sqrt{2}\times\pi\times\frac{90}{360}=\sqrt{2}\pi$$

$\sqrt{2}\pi$cm